

На правах рукописи

СУЛТАНОВ ЛЕНАР УСМАНОВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ БОЛЬШИХ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ
ДЕФОРМАЦИЙ
В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ МКЭ

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ – 2005

Работа выполнена на кафедре теоретической механики Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования “Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина”

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Голованов Александр Иванович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Каюмов Рашит Абдулхакович

доктор технических наук,
профессор Шляников Валерий Николаевич

Ведущая организация: Научно-исследовательский институт
механики при Нижегородском
государственном университете
им. Н.И. Лобачевского

Защита состоится “24” ноября 2005 г. в 14 ч. 30 мин. в ауд. физ. 2 КГУ на заседании диссертационного совета Д 212.081.11 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке КГУ им. Н.И. Лобачевского

Автореферат разослан “19” октября 2005 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, к. ф.-м. н.



А.А. Саченков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. В последнее время со стороны исследователей все больше возрастает интерес к нелинейным задачам механики твердого деформируемого тела, учитывающих все более сложные процессы. Такие задачи возникают в производстве, где широко используются материалы со сложными физико-механическими свойствами, также существует проблема моделирования технологических процессов. При этом нужно учитывать, что в элементах конструкций могут возникать конечные деформации, и решение задач такого рода осложняется тем, что материалы характеризуются различными физическими свойствами, такими как упругость, пластичность, вязкость. Поэтому создание эффективных методик исследования нелинейных процессов деформирования, применимых к более широкому классу задач, является актуальной задачей на сегодняшний день.

Для решения нелинейных задач используются, как правило, численные методы, к которым относится метод конечных элементов (МКЭ). В настоящее время МКЭ является самым популярным способом решения практических задач механики деформируемого твердого тела (МДТТ). С его помощью проводят расчеты по определению напряженно-деформированного состояния (НДС) и несущей способности реальных конструкций самых различных отраслей техники и строительства. При этом эффективно решаются задачи как общей, так и локальной прочности. Развитие метода конечных элементов на динамические и нелинейные проблемы предоставляют возможность достоверно моделировать такие сложные процессы, как разрушение, удар, потеря устойчивости, штамповка, вытяжка и т.д. Практически все задачи МДТТ получили постановку и алгоритмы решения в рамках конечноэлементных методик.

Традиционно в МДТТ для решения нелинейных задач получило распространение лагранжево описание среды, согласно которому состояние элементарного объема описывается в компонентах вектора перемещений из недеформированного состояния в деформированное и второго тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа, также отнесенного к недеформированному объему. В этом случае хорошо формулируется краевая задача в дифференциальной или вариационной форме, для решения которой возможно использование различных численных методов. Однако подобный подход имеет существенный недостаток в задачах с большими деформациями. Он связан со сложностью построения определяющих соотношений между используемыми тензорами напряжений и деформаций, который особенно сильно проявляется при постулировании определяющих соотношений в дифференциальной (скоростной) форме. Тогда, если течение среды описывать в эйлеровой постановке, то можно эти трудности обойти.

Цель работы:

на основе пошагового нагружения в рамках комбинированного лагранжево-эйлерового описания сплошной среды разработать методику исследования

процесса деформирования трехмерных неупругих тел с учетом больших перемещений, поворотов и конечных деформаций;

построить определяющие соотношения в скоростях напряжений, рассмотреть класс гиперупругих, упругопластических и вязкоупругопластических материалов;

получить разрешающие уравнения и разработать алгоритм решения задач механики твердого деформируемого тела с учетом физической нелинейности;

на основе метода продолжения по параметру разработать алгоритм исследования закритического поведения при потере устойчивости;

на основе метода конечных элементов разработать алгоритм и создать программное обеспечение для решения указанного класса задач;

решить ряд тестовых и прикладных задач нелинейного деформирования неупругих тел.

Научную новизну работы составляет использование современного описания процесса деформирования и течения среды в сочетании с шаговой процедурой нагружения и итерационным уточнением напряженного состояния в каждой текущей точке исследуемого объема.

Приведенные численные примеры демонстрируют широкие возможности и эффективность настоящей методики решения нелинейных задач механики твердого деформируемого тела.

На защиту выносятся:

методика исследования напряжено-деформированного состояния вязкоупругопластических тел с учетом больших перемещений, поворотов и конечных деформаций, основанная на методе пошагового нагружения в рамках комбинированного лагранжево-эйлерового описания сплошной среды;

методика исследования закритического поведения при потере устойчивости на основе метода продолжения решения по параметру;

численный алгоритм и программное обеспечение на базе конечноэлементной дискретизации, позволяющее решать задачи указанного класса;

результаты решения ряда нелинейных задач механики деформируемого твердого тела.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими математическими постановками, хорошим совпадением численных решений тестовых задач с аналитическими или полученными другими авторами.

Практическая значимость работы заключается в возможности использования разработанной вычислительной методики для расчета напряжено-деформированного состояния реальных конструкций, для исследования широкого класса материалов, таких как эластомеров, пеноматериалов, грунтов и т.д., также ее можно развить на задачи моделирования технологических процессов и движения многофазных сред.

Апробация работы. Отдельные результаты и работа в целом доложены на итоговых научных конференции КГУ (Казань, 2003-2005), Международных молодежных школах-конференциях «Лобачевские чтения» (Казань, 2002, 2003), городском научно-методическом семинаре кафедры теоретической механики КГТУ (Казань, 2003), итоговой научной конференции казанского научного центра РАН (Казань, 2003), XV Всероссийской межвузовской научно-технической конференции «Электромеханические и внутрикамерные процессы в энергетических установках, струйная акустика и диагностика, приборы и методы контроля природной среды, веществ, материалов и изделий» (Казань, 2003), городской научно-практической конференции «Студенты Зеленодольску» (Зеленодольск, 2003), Международной научной конференции «Фундаментальные и прикладные вопросы механики» (Хабаровск, 2003), Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2004), Всероссийском семинаре «Сеточные методы для краевых задач и приложения» (Казань, 2004), Международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики» (Казань, 2004), XVII сессии Международной школы «Модели механики сплошной среды» (Казань, 2004), X-ом и XI-ом Международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» (Ярополец, 2004, 2005), XII международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Владимир, 2003); XIV международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, 2005); Школе молодых ученых по механике сплошных сред (Пермь, 2003, 2005), XX Международных конференциях «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов» (Санкт-Петербург, 2003, 2005); семинарах кафедры теоретической механики КГУ и лаборатории механики оболочек НИИММ КГУ им. Н.Г. Чеботарева (Казань, 2005).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 20 научных работ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 141 страниц, включая 78 рисунков и список литературы из 176 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится обзор работ, близких к теме диссертации, сформулированы актуальность, цель работы, ее структура, выписаны положения, выносимые на защиту.

Первая глава посвящена нелинейной механике деформируемых тел. Рассматривается кинематика деформируемой среды, вводятся тензоры и меры деформации и геометрический смысл их компонент. Приведены различные тензоры напряжений, получившие распространение в МДТТ, а также уравнения движения среды. Приводится вариационное уравнение принципа виртуальных мощностей, получено уравнение в скоростях напряжений.

Для описания процесса деформирования используется комбинированная лагранжево-эйлерова постановка. Поведение материальной точки (элементарного объема) отслеживается в соответствии с лагранжевым методом описания среды, а в текущий момент времени процесс деформирования представляет собой течение среды с некоторыми физико-механическими свойствами. Это соответствует подходу Эйлера, широко применяемого в механике сплошных сред.

Напряженное состояние описывается тензором истинных напряжений Коши-Эйлера $(\Sigma) = \sigma^{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$, здесь \bar{e}_i – орты глобальной декартовой системы координат. Исходным является уравнение виртуальных мощностей в актуальной конфигурации

$$\iiint_{\Omega} (\Sigma) \cdot (\delta d) d\Omega = \iiint_{\Omega} \bar{f} \cdot \delta \bar{v} d\Omega + \iint_{S^{\sigma}} \bar{p} \cdot \delta \bar{v} dS, \quad (1)$$

где \bar{v} – скорость изменения конфигурации, (d) – тензор деформации скорости, Ω – текущий объем, S^{σ} – часть его поверхности, на которой заданы усилия, \bar{f} , \bar{p} – векторы массовых и поверхностных сил. Путем линейаризации уравнения мощностей (1) получено уравнение в скоростях напряжений

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \left[(\dot{\Sigma}) \cdot (\delta d) + (\Sigma) \cdot (\delta \dot{d}) + \frac{\dot{J}}{J} (\Sigma) \cdot (\delta d) \right] d\Omega = \\ = \iiint_{\Omega} \left[\dot{\bar{f}} + \bar{f} \frac{\dot{J}}{J} \right] \cdot \delta \bar{v} d\Omega + \iint_{S^{\sigma}} \left[\dot{\bar{p}} + \bar{p} \frac{\dot{J}}{J} \right] \cdot \delta \bar{v} dS, \end{aligned} \quad (2)$$

где J – относительное изменение объема в процессе деформирования.

Во второй главе рассматривается вопрос о построении определяющих соотношений и разрешающих уравнений.

Рассмотрено свойство индифферентности и инвариантности различных тензоров, вводится в рассмотрение производная Яуманна тензора напряжений Коши-Эйлера (Σ^J) , которая имеет вид

$$(\Sigma^J) = (\dot{\Sigma}) - (\omega) \cdot (\Sigma) + (\Sigma) \cdot (\omega), \quad (3)$$

где (ω) – тензор скоростей поворота.

Описывается класс нелинейно упругих материалов, для которых предполагается существование потенциальной энергии упругой деформации W как функции инвариантов тех или иных мер деформаций, производная от которой по соответствующей мере деформации определяет тензор напряжений, в частности

$$(\Sigma) = \frac{2}{J} (B) \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial B} \right), \quad (4)$$

где (B) – мера деформации Фингера (левый тензор Коши-Грина).

В качестве примера рассмотрен стандартный материал второго порядка, для которого определяющее соотношение в скоростях напряжений записывается в следующем виде

$$(\dot{\Sigma}) = \frac{1}{J} \left\{ \frac{\tilde{\lambda}}{2} (I) \cdot (\dot{B}) \cdot (B) + \left[\frac{\tilde{\lambda}}{2} (I_{1B} - 3) - \tilde{\mu} \right] (\dot{B}) + 2\tilde{\mu}(B) \cdot (\dot{B}) \right\} - \frac{j}{J}(\Sigma). \quad (5)$$

Здесь $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ – коэффициенты Ляме обычного закона Гука, I_{1B}, I_{2B} – соответственно первый и второй инварианты тензора (B) .

При решении задач с учетом пластического деформирования используется аддитивное представление для деформации скорости, считается, что относительное изменение объема является упругой деформацией скорости, предполагается справедливость ассоциированного закона течения.

Рассмотрен идеально пластический изотропный материал. Для удобства тензоры деформации скорости и напряжений разложены на шаровые части $d_0 = \frac{1}{3} d^{ii}$, $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma^{ii}$, и девиаторы $d'^{ij} = d^{ij} - \delta_{ij} d_0$, $\sigma'^{ij} = \sigma^{ij} - \delta_{ij} \sigma_0$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

Физические соотношения упругого деформирования записаны в виде линейной зависимости между производной Яуманна тензора напряжения (3) и тензора деформации скорости

$$(\dot{\Sigma}_0^J) = 3K(d_0), \quad (\dot{\Sigma}'^J) = 2G(d'), \quad (6)$$

где G – модуль сдвига, K – модуль объемного сжатия. В этом случае соотношения упругости будут полностью удовлетворять принципу индифферентности.

В качестве условия пластичности в работе используется критерий Губера-Мизеса, для которого функция текучести Φ имеет вид

$$\Phi(\sigma^{ij}) = \sigma_i - \sigma_T = 0, \quad (7)$$

где σ_i – интенсивность напряжений, σ_T – предел текучести. Для материалов с внутренним трением применяется условие пластичности Мизеса-Боткина

$$\Phi(\sigma^{ij}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_i - C^* + \sigma_0 \operatorname{tg} \varphi^* = 0, \quad (8)$$

здесь C^* , φ^* – сцепление и угол внутреннего трения на октаэдрических площадках.

В рамках классической теории течения пластическое деформирование моделируется на основе метода проецирования напряжений на поверхность текучести. То есть, если имеется два бесконечно близких состояния l и $(l+1)$, то по известным параметрам l -го состояния определяется напряжения $(l+1)$. Сначала вычисляется тензор пробных напряжений $(\tilde{\Sigma}) = ({}^l\Sigma) + ({}^l\dot{\Sigma})\Delta t$, где $(\dot{\Sigma})$ определяется

с помощью (3) и (6). Тогда шаровая часть тензора истинных напряжений будет иметь вид

$$({}^{l+1}\Sigma_0) = (\tilde{\Sigma}_0), \quad (9)$$

а девиатор истинных напряжений определяется как проекция девиатора «пробных» на поверхность текучести.

$$({}^{l+1}\Sigma') = \frac{\sigma_T}{\tilde{\sigma}_i} (\tilde{\Sigma}'), \quad (10)$$

При моделировании процессов деформирования с учетом деформаций ползучести, используется аддитивное представление деформации скорости. Рассмотрена обобщенная модель Максвелла, при учете пластических деформаций используется теория течения и метод проецирования напряжений на поверхность текучести. Определяющие соотношения в этом случае записаны как

$$\begin{aligned} (\dot{\Sigma}_0) &= 3K(d_0), \\ (\dot{\Sigma}') &= 2G(d') + (\omega) \cdot (\Sigma) - (\Sigma) \cdot (\omega) - \frac{(\Sigma')G}{\eta}, \end{aligned} \quad (11)$$

где η – коэффициент вязкости.

Для каждой модели поведения среды получены разрешающие уравнения, путем подстановки соответствующих физических соотношений в уравнение (2).

Третья глава посвящена методике, основанной на методе пошагового нагружения, численного решения нелинейных задач. Приводится общий алгоритм решения, на каждом шаге проводится итерационное уточнение текущего НДС. Для исследования закритического поведения конструкций разработан алгоритм на основе метода продолжения по параметру. Дается конечноэлементная дискретизация на базе восьмиузлового элемента.

Для решения нелинейных задач используется метод последовательных нагружений, который может быть естественно реализован в рамках МКЭ. Процесс деформирования представляется в виде последовательности равновесных состояний. Переход от предыдущего состояния к последующему происходит путем приращения нагрузки. Методика расчета состоит в разработке алгоритма вычисления $(l+1)$ -го состояния при известных параметрах процесса l -го состояния.

На каждом шаге нагружения строится разрешающее уравнение, в которое входит особое слагаемое, невязка. По физическому смыслу это есть уравнение виртуальных мощностей (1) в l -м состоянии, которое должно удовлетворяться для точного решения. Т.к. это уравнение на шаге нагружения в настоящей методике точно не выполняется, то его вводим в линеаризованное уравнение в виде невязки. Опыт решения нелинейных задач в шаговой постановке (в том числе и представленной в настоящей работе) свидетельствует, что наличие такого рода слагаемых в правой части соответствующего линеаризованного уравнения

препятствует накоплению ошибок и не позволяет решению удаляться от действительной кривой деформирования.

Полученное уравнение является линейным относительно скорости ${}^l\vec{v}$. Т.к. исследуемые процессы не имеют явного динамического характера (ускорения не учитываются), то под временем можно понимать любой монотонно возрастающий параметр, определяющий изменение нагрузки. В таком аспекте вполне уместно принять производную по времени как отношение приращения соответствующих величин, получаемых при переходе с l -го состояния в $(l+1)$ -ое.

В результате конечноэлементной дискретизации получено уравнение для приращений перемещений в узловых точках $\{\Delta^l u\}$

$$[{}^l K]\{\Delta^l u\} = \{\Delta^l P\} - \{{}^l H\}, \quad (12)$$

где $[{}^l K]$ – матрица левых частей, $\{\Delta^l P\}$ – вектор приращения узловых сил, $\{{}^l H\}$ – вектор невязки.

Решая систему алгебраических уравнений (12), получим приращение перемещений, с помощью которых определим конфигурацию $(l+1)$ шага ${}^{l+1}R = {}^l R + \Delta^l u$ и напряженное состояние $({}^{l+1}\Sigma) = ({}^l\Sigma) + ({}^l\dot{\Sigma})\Delta t$.

При появлении пластических деформаций и вследствие использования метода проецирования напряжений на поверхность текучести (9), (10), полученное напряженное состояние не удовлетворяет разрешающей системе уравнений (12). Поэтому применяется итерационное уточнение текущего НДС. Эта итерационная процедура основана на введении в разрешающее уравнение вариации мощности «дополнительных напряжений» (Σ_ϕ) на возможных

деформациях скорости $\iiint_{\Omega_i} ({}^l\Sigma_\phi^m) \cdot (\delta^l d) d\Omega$, где дополнительные напряжения

определяются как разность девиаторов истинных и «пробных» напряжений. Итоговое уравнение для m -ой итерации на l -м шаге нагружения имеет вид

$$[{}^l K]\{\Delta^l u_m\} = \{\Delta^l P\} - \{{}^l H\} - \{{}^l S^m\}, \quad (13)$$

где $\{{}^l S^m\}$ – вектор дополнительных напряжений.

При исследовании вязкоупругопластических деформаций алгоритм итерационного уточнения выглядит аналогично лишь за исключением разрешающего уравнения, в котором в правой части появляется дополнительное

слагаемое $\iiint_{\Omega} \frac{G}{\eta} ({}^l\Sigma') \cdot (\delta^l d) d\Omega$, характеризующее вязкие деформации.

При исследовании закритического поведения при потере устойчивости нагружение не носит монотонно возрастающего характера, вследствие чего применение классического шагового метода представляется невозможным, тогда используется алгоритм, основанный на методе продолжения по параметру.

Процесс деформирования представляется в виде последовательности равновесных состояний, тогда на очередном шаге имеем систему линейных алгебраических уравнений (13).

Считаем, что известны все параметры l -го состояния. На очередном шаге приращение прикладываемой нагрузки является неизвестной и представляется в следующем виде $\{\Delta^l P\} = \Delta^l t \{P_0\}$, где $\{P_0\}$ – вектор, задающий направление нагружения, а $\Delta^l t$ – параметр, определяющий приращение нагрузки, который надо найти. Тогда решение ищется в виде проекции касательной к кривой деформирования

$$\{\Delta^l u\} = {}^l\lambda \{\Delta^{l-1} u\} + \{\Delta Y\}, \quad \Delta^l t = {}^l\lambda \Delta^{l-1} t - \Delta r,$$

где ${}^l\lambda$ – параметр, определяющий величину шага, $\{\Delta^{l-1} u, \Delta^{l-1} t\}$ – вектор касательной, $\{\Delta Y, \Delta r\}$ – вектор проекции касательной к кривой деформирования, который находится из условия ортогональности вектора касательной к вектору проекции и уравнения равновесия.

Параметр ${}^l\lambda$, определяющий длину касательной на каждом шаге, в приведенных ниже численных расчетах принят как отношение длины дуги на предыдущем шаге приращения к длине дуги на первом шаге.

Пространственная дискретизация основана на методе конечных элементов в рамках полилинейной трехмерной изопараметрической аппроксимации на базе восьмиузловых элемента.

В четвертой главе приводится решение тестовых и прикладных задач. В качестве тестовых, рассмотрены следующие задачи: упругопластическое деформирование толстостенной балки под действием внутреннего давления, исследование закритического поведения упругой арки, растяжение вязкоупругого бруса; приводятся сравнения с результатами, полученными аналитическим путем. В качестве новых и прикладных задач решены упругопластическое деформирование балки, упругое деформирование плиты из стандартного материала второго порядка, вязкоупругопластическое деформирование «подковы», упругопластическое деформирование трубы с учетом потери устойчивости, расчет грунтовой насыпи.

1. Задача об изгибе в кольцо упругой балки прямоугольного поперечного сечения, жестко защемленной с одной стороны и нагруженной изгибающим моментом с другой. Определяющие соотношения записаны в виде (6). Значение момента, при котором балка изгибается в кольцо, было найдено из аналитического решения. Параметрическое исследование

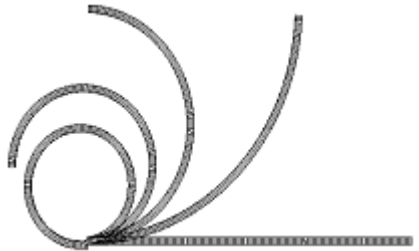


Рис. 1

по изменению сетки конечных элементов показало, что увеличение числа элементов по высоте мало сказывается на точности решения, наибольшее влияние оказывает число элементов по длине. Величина шага нагружения существенно влияет на точность, что вполне объяснимо. На рис. 1 изображено деформированное состояние балки и несколько промежуточных этапов нагружения при сетке конечных элементов $200 \times 1 \times 1$, 1000 шагов.

2. Распределение напряжений в толстостенной длинной трубе под осесимметричным внутренним давлением p при упругопластичном деформировании в геометрически линейной постановке (плоская задача). Внутренний радиус трубы $a=1$ см, внешний $b=2$ см, модуль упругости $E=2000000$ кг/см²; коэффициент Пуассона $\mu=0.3$. Материал полагаем идеально пластическим, критерием пластичности служит условие Губера-Мизеса (7), физические соотношения упругого деформирования записываются в виде (6). Из аналитического решения было найдено отношение внутреннего давления к пределу текучести $p/\sigma_T=0.7208$, при котором радиус пластической зоны $c=1.5$ см. На рис. 2 показано распределение радиальных и окружных напряжений в трубе по отношению к пределу текучести при сетке конечных элементов 80×20 , а также аналитическое решение (штрихованная линия).

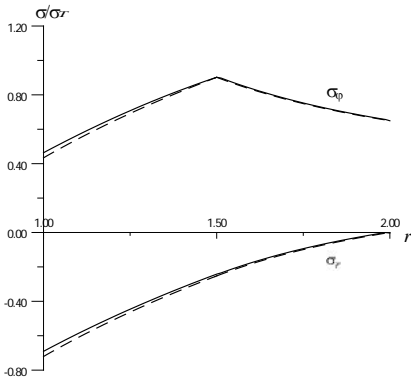


Рис. 2

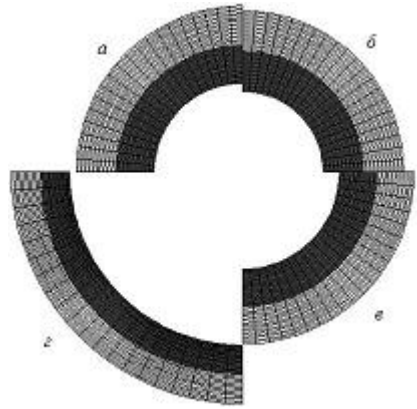


Рис. 3

Далее задача была решена с учетом геометрической нелинейности с использованием сетки конечных элементов размером 40×20 . При этом варьировался модуль упругости E , а величина внутреннего давления p подбиралась таким образом, чтобы радиус пластической зоны соответствовал $c=1.5$ см. Нагрузка была разделена на 50 шагов. Так на рис. 3 изображены деформированные состояния при различных значениях E и p : $E=2000000$ кг/см², $p/\sigma_T=0.7208$ (геометрически линейная задача) – рис. 3, а; $E=200000$ кг/см², $p/\sigma_T=0.6584$ – рис. 3, б; $E=1000$ кг/см², $p/\sigma_T=0.6057$ – рис. 3, в; $E=200$ кг/см², $p/\sigma_T=0.3578$ – рис. 3, г. Темным цветом изображены области пластического деформирования. Исследование показало, что при уменьшении жесткости

материала, величина внутреннего давления, необходимого для появления заданной области пластичности, также убывает, а труба все более расширяется. В частности, ее диаметр существенно изменяется, а толщина уменьшается. Также отметим, что при решении задачи с учетом конечных деформаций, перемещений и поворотов, в отличие от геометрически линейной постановки, величина внутреннего давления также падает.

3. Задача об упругом деформировании плиты из стандартного материала второго порядка (5) под действием равномерного давления $q = 40 \text{ кг/см}^2$. Нижнее ребро плиты не имеет вертикального смещения. Плита – квадратная со стороной $a=20 \text{ см}$ и толщиной $h=0.5 \text{ см}$, $E=1000 \text{ кг/см}^2$, $\mu=0.3$. На рис. 4 изображено деформированное состояние плиты.

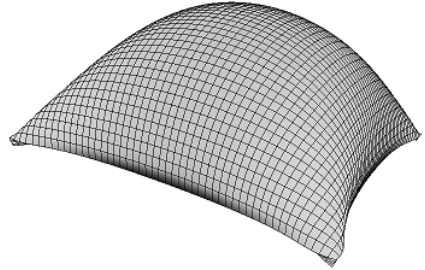


Рис. 4

4. Упругопластическое деформирование жестко защемленной с обоих концов балки прямоугольного поперечного сечения под действием распределенной нагрузки $q=25 \text{ кг/см}^2$. Длина балки $l=25 \text{ см}$, высота $h=1 \text{ см}$, ширина $b=0.125 \text{ см}$, $E=20000 \text{ кг/см}^2$, $\mu=0$, предел текучести $\sigma_T=750 \text{ кг/см}^2$. Материал идеально пластический, подчиняющийся критерию пластичности Губера-Мизеса (7), определяющие соотношения заданы в виде (6). Т.к задача является симметричной, то достаточно рассмотреть половину балки, введя дополнительные условия симметрии. При решении используем сетку конечных элементов размером $100 \times 10 \times 1$. Нагрузка разбита на 100 шагов.

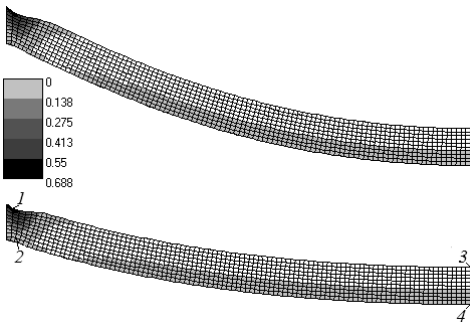


Рис. 5

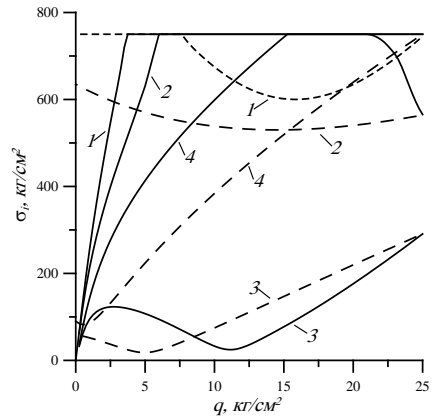


Рис. 6

На рис. 5 показано распределение интенсивности пластических деформаций в нагруженном и разгруженном состояниях для половины балки. Интересно отметить в этой задаче наличие впадины в окрестности защемления, а

именно в этой зоне возникают конечные пластические деформации. Наличие этой впадины объясняется учетом физической нелинейности, так как в упругой задаче она не появляется.

На рис. 6 приведены графики зависимости от нагрузки интенсивности напряжений в точках, указанных на рис. 5, где сплошной линией показан этап нагружения, а штрихом – этап разгрузки. Так в точке 1 можно наблюдать этап упругого деформирования с возрастанием интенсивности напряжений, затем наступает этап пластического с возрастанием интенсивности пластических деформаций; при разгрузке сначала происходит убывание интенсивности напряжений с неизменными пластическими деформациями, затем увеличение до предела текучести и наступление этапа догрузки с возрастанием пластических деформаций (здесь имеет место влияние впадины). В точке 2 и 4, как видно из графиков, после достижения предела текучести, возникают пластические деформации, которые сохраняются и после снятия нагрузки. Однако, в точке 2 можно наблюдать эффект падения интенсивности напряжений при возрастании нагрузки. В точке 3 возникают лишь упругие деформации.

5. Задача устойчивости шарнирно опертой круговой нерастяжимой арки под равномерным давлением. Радиус арки 10 см, центральный угол равен π рад, толщина и ширина арки – 1 см, $E=2000$ кг/см², $\mu=0$. Физические соотношения выбраны в виде (6).

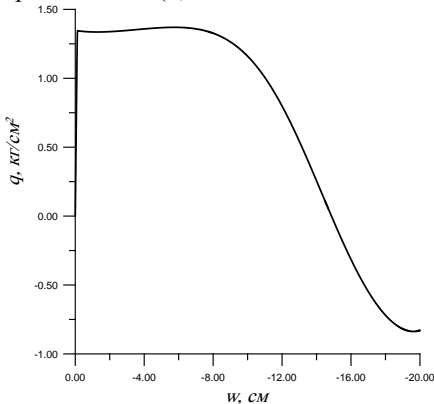


Рис. 7

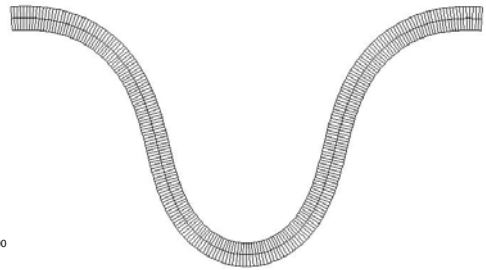


Рис. 8

В силу симметрии рассматривалась половина арки, разбитая на сетку конечных элементов размером $120 \times 2 \times 1$, с постановкой граничных условий шарнирного опирания для конца арки (узлы, расположенные на средней линии основания полностью зашлемлены) и условий симметрии для центральной точки (узлы не имеют горизонтального смещения). Решение основано на методе продолжения решения по параметру. Значение критической нагрузки $q^* = 1.343$ кг/см², полученной настоящей методикой, практически совпадает с

аналитическим решением $q^T = 1.333 \text{ кг/см}^2$. На рис. 7 приведен график зависимости нагрузки от прогиба средней точки арки, на рис. 8 – деформированное состояние.

6. Растяжение вязкоупругого бруса. Рассмотрен брус квадратного поперечного сечения, на одном конце которого заданы напряжения $\sigma(t) = \sigma^0 t$, а другой – защемлен. В качестве реологической модели выбрана обобщенная модель Максвелла (11).

На рис. 9 приводится сравнение точного решения (штрихованная линия) и решения, полученное настоящей методикой. Как видно результаты практически идентичны при малых деформациях и начинают расходиться при увеличении величины деформации, что вполне очевидно, так как точное решение справедливо при малых растяжениях.

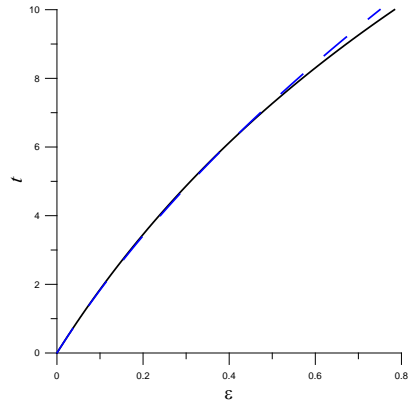


Рис. 9

7. Решена задача изгиба конструкции, конечноэлементная модель которой представлена на рис. 10. В силу симметрии рассмотрена полконструкция, которая разбита на две подконструкции: четырехугольное основание и обод. Примем, что левый конец основания защемлен, вертикально направленная вниз нагрузка равномерно распределена по верхней грани обода и изменяется по закону $q = q_0 t$. Задача решалась за 150 шагов при следующих параметрах: внутренний радиус обода равен 10 см, внешний – 20 см, ширина левого края основания – 5 см, правого – 10 см, длина – 20 см, толщина конструкции – 1 см, $E = 2.0 \times 10^6 \text{ кг/см}^2$, $\mu = 0.3$, $\eta = 1.0 \times 10^7 \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{см}^2}$, $q_0 = 2.0 \text{ кг/см}^2$,

$\sigma_T = 1500 \text{ кг/см}^2$. Четырехугольное основание было разбито на 20 конечных элементов по длине, 10 – по ширине, 1 – по толщине, обод – 20 элементов по окружному направлению, 10 – по радиальному, 1 – по толщине. Реологическая модель записана в виде (11), условие пластичности (7). Также для наглядности была решена аналогичная задача, но без учета деформаций ползучести.

На рис. 11 представлено деформированное состояние конструкции с распределением интенсивности пластических деформаций. На рис. 12 показан график зависимости перемещения точки A от нагрузки, на рис. 13 – зависимость интенсивности напряжений в точке B, где штриховыми линиями обозначено решения без учета вязкости, а сплошной – с учетом последних. Из приведенных рисунков, видно, что учет деформаций ползучести ведет к понижению скорости развития напряжений при возрастании деформаций.

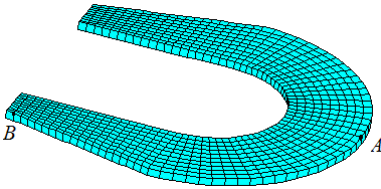


Рис. 10

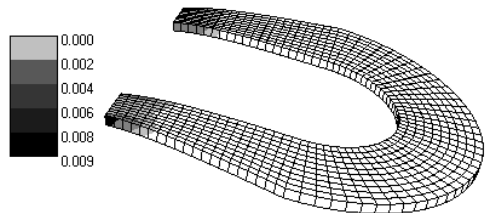


Рис. 11

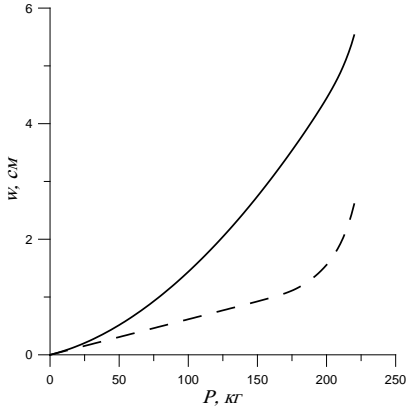


Рис. 12

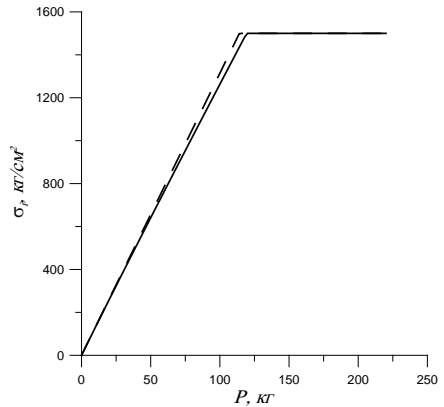


Рис. 13

8. Закритическое поведение толстостенной трубы под воздействием моментов, приложенных с обоих концов. Физические соотношения записаны в виде (6), используется условие пластичности (7). Внешний радиус трубы – 5 см, длина трубы – 50 см, толщина – 1 см, $E=2000 \text{ кг/см}^2$, $\mu=0.3$, $\sigma_T = 250 \text{ кг/см}^2$.

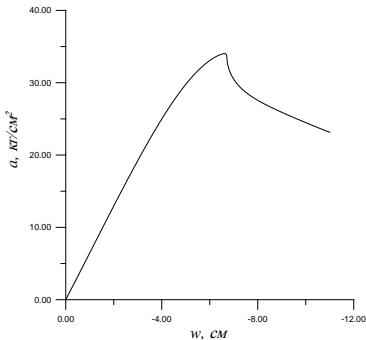


Рис. 14

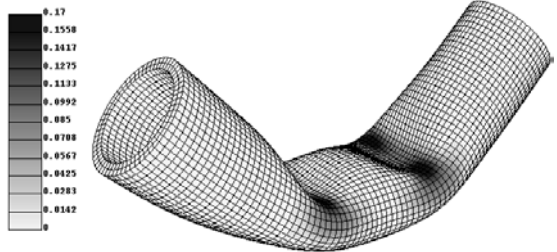


Рис. 15

На рис. 14 приведен график нагрузка-перемещение конца трубы, где a – некий параметр нагружения. На рис. 15 показано распределение интенсивности пластических деформаций. Как видно, в трубе в процессе деформирования

происходит перестройка формы, и появляются вмятины. В области перестройки формы возникают пластические деформации, а наибольшие – во вмятинах.

9. Задача деформирования грунтовой насыпи под действие собственного веса и нагрузки.

Грунтовой массив представляется как сплошная среда, обладающая специфическими физико-механическими свойствами. Исследовано НДС грунтовой насыпи под действием собственного веса и нагрузки, равномерно распределенной по верхней грани, нижняя грань не имеет вертикальных смещений, а боковые – горизонтальных (рис. 16). Рассмотрен случай плоского деформирования. Считается, что грунт – однородная среда со следующими физико-механическими свойствами: модуль деформации $E=0,160 \text{ МПа}$, коэффициент бокового расширения $\mu=0,42$, сцепление $C=40 \text{ КПа}$, угол внутреннего трения $\varphi=17^\circ$, плотность $\rho=2000 \text{ кг/м}^3$, величина нагрузки $q=0,40 \text{ МПа}$. Физические соотношения записаны в виде (6), в качестве условия текучести выбран критерий Мизеса-Боткина (8). Процесс деформирования был разбит на два этапа. На первом этапе производился расчет под действием собственного веса. Затем исследовалась насыпь под действием нагрузки с учетом напряженного состояния, полученного на предыдущем этапе.

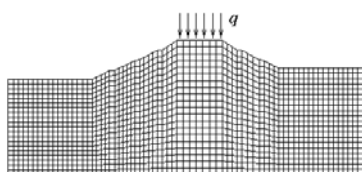


Рис. 16

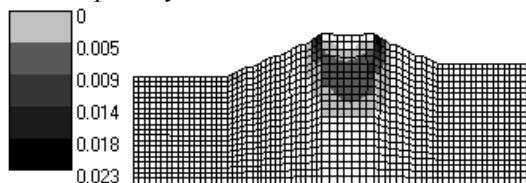


Рис. 17

На рис. 17 показано распределение интенсивности пластических деформаций. Из рис. 17 видно, что грунт в районе нагружения имеет осадку, максимальные пластические деформации возникают на склонах. Зона пластических деформаций имеет небольшую площадь, поэтому при таком нагружении для данной формы насыпи не возникает опасных участков.

В заключении приводятся основные результаты и выводы, полученные в диссертации:

построены разрешающие уравнения и определяющие соотношения для сред с различными физическими свойствами. Приведен алгоритм решения задачи гиперупругого, упругопластического и вязкоупругопластического деформирования, рассмотрены критерия пластичности Губера-Мизеса и Мизеса-Боткина. Процесс пластического деформирования моделируется на основе метода проецирования напряжений на поверхность текучести с итерационным уточнением текущего напряженно-деформированного состояния;

для исследования процесса деформирования с учетом потери устойчивости разработан алгоритм, основанный на методе продолжения решения по параметру.

на базе конечноэлементной дискретизации разработана численная методика и создан соответствующий программный пакет для решения нелинейных задач на языке Fortran-90;

приведенные численные примеры демонстрируют широкие возможности и эффективность настоящей методики решения нелинейных задач механики твердого деформируемого тела.

Представленная в настоящей работе вычислительная технология решения задач механики деформируемого тела позволяет исследовать широкий класс материалов, в рамки описанной методологии легко укладываются разнообразные физические модели поведения сред. Описанная методика позволяет формулировать и решать задачи моделирования технологических процессов обработки материалов, движения многофазных сред, одной из фаз которых является деформируемый скелет (матрица). При этом нет никаких ограничений на величины деформаций.

Публикации по теме диссертации:

1. Голованов А.И. Численное моделирование больших деформаций неупругих трехмерных тел / А.И. Голованов, Ю.Г. Коноплев, С.А. Кузнецов, Л.У. Султанов // Наукоемкие технологии. – 2004. – №4. – Т. 5. – С. 52-60.

2. Голованов А.И. Расчет больших упругопластических деформаций трехмерных тел МКЭ / А.И. Голованов, Л.У. Султанов // Математ. моделир. систем и процессов: Межвуз. сб. науч. тр. – Пермь: Перм. гос. техн. ун-т, 2004. – №12. – С. 4-11.

3. Голованов А.И. Численный расчет больших упругих деформаций трехмерных тел / А.И. Голованов, Л.У. Султанов // Прикладная математика и механика: сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2004. – С. 180-182.

4. Голованов А.И. Исследование больших деформаций упругих трехмерных тел МКЭ / А.И. Голованов, Л.У. Султанов // Фундаментальные и прикладные вопросы механики / сб. докл. междунар. науч. конф. Т. 2 – Хабаровск: Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 2003. – С. 41-47.

5. Голованов А.И. Пошаговое исследование больших деформаций упругих тел / А.И. Голованов, Л.У. Султанов // Электромеханические и внутрикамерные процессы в энергетических установках, струйная акустика и диагностика, приборы и методы контроля природной среды, веществ, материалов и изделий / сб. материалов XV Всеросс. межвузов. науч.-техн.й конф. Ч. 1. – Казань: КГУ, 2003. – С. 324-325.

6. Голованов А.И. Исследование больших упругопластических деформаций трехмерных тел / А.И. Голованов, Ю.Г. Коноплев, С.А. Кузнецов, Л.У. Султанов // Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов / Тр. XX Междунар. конф. (СПб., 24-26 сен., 2003 г.). – Т. 2. – СПб: 2003 – С. 128-133

7. Голованов А.И. Исследование больших упругопластических деформаций трехмерных тел / А.И. Голованов, Ю.Г. Коноплев, С.А. Кузнецов,

Л.У. Султанов, О.И. Борецкий // Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов / тез. докл. XX Междунар. конф. (СПб., 24-26 сен., 2003 г.). – СПб: 2003. – С. 51-53

8. Голованов А.И. Постановка задачи и разработка алгоритма исследования больших деформаций упругих тел / А.И. Голованов, А.С. Сенникова, Л.У. Султанов // Зимняя школа по механике сплошных сред (тринадцатая). Школа молодых ученых по механике сплошных сред / тез. докл. – Пермь: 2003. – С. 109.

9. Голованов А.И. Пошаговое исследование больших деформаций упругих тел МКЭ / А.И. Голованов, Л.У. Султанов // Двенадцатая Междунар. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам / тез. докл. (Владимир, 30 июня-5 июля, 2003 г.). – Т. 2. – М.: Изд-во МАИ, 2003. – С. 197-198.

10. Голованов А.И. Численное исследование больших деформаций неупругих трехмерных тел МКЭ / А.И. Голованов, Л.У. Султанов // Материалы XVII сессии Междунар. shk. по моделям механики сплошной среды / Тр. математ. центра имени Н.И. Лобачевского Т. 27. – Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2004. – С. 126-129.

11. Голованов А.И. Численное исследование закритического состояния упругих тел с учетом больших деформаций / А.И. Голованов, Л.У. Султанов // Сеточные методы для краевых задач и приложения / материалы всерос. семинара, посвященного 200-летию Казан. гос. ун-та. – Казань: КГУ, 2004. – С. 43-47.

12. Голованов А.И. Исследование закритического состояния упругопластических тел с учетом больших деформаций / А.И. Голованов, Л.У. Султанов // Актуальные проблемы математики и механики / Материалы междунар. науч. конф. / Тр. математ. центра им. Н.И. Лобачевского Т. 25. – Казань: Изд-во казанск. матем. общ-ва, 2004. – С. 90-91.

13. Голованов А.И. Численный расчет больших упругопластических деформаций трехмерных тел / А.И. Голованов, Л.У. Султанов // Математ. моделир. и краевые задачи / Тр. Всерос. науч. конф. Ч. 1. – Самара, 2004. – С. 60-62.

14. Голованов А.И. Исследование больших деформаций упругопластических трехмерных тел МКЭ / А.И. Голованов, Л.У. Султанов // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред / материалы XI Междунар. симп. – Т. 1. – М.: Изд-во МАИ, 2005. – С.57-59.

15. Голованов А.И. Пошаговое исследование больших упругопластических деформаций трехмерных тел методом конечных элементов / А.И. Голованов, Л.У. Султанов // Зимняя школа по механике сплошных сред (четырнадцатая). Шк. молодых ученых по механике сплошных сред / тез. докл. – Пермь: 2005. – С. 86.

16. Голованов А.И. Численное исследование упругопластических тел при больших деформациях / А.И. Голованов, Л.У. Султанов // Материалы XIV Междунар. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, Крым, 25-31 мая, 2005 г.) – М.: Вузовская книга: 2005. – С. 127-129.

17. Голованов А.И. Исследование больших вязкоупругопластических деформаций трехмерных тел / А.И. Голованов, Л.У. Султанов // Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов / Тр. XXI Междунар. конф. (СПб., 4-7 окт., 2005 г.). – Т. 1. – СПб: ВВМ, 2005 – С. 70-72.

18. Сенникова А.С. Постановка задачи и разработка алгоритма исследования больших деформаций упругих тел / А.С. Сенникова, Л.У. Султанов // Лобачевские чтения-2002 / Материалы междунар. молодеж. шк.-конф. / Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 18. Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 2002. – С. 88-89.

19. Султанов Л.У. Расчет больших деформаций упругих тел МКЭ / Л.У. Султанов // Студенты Зеленодольску: городская научн.-практ. конф. / сб. докл. – Зеленодольск: 2003. – С. 53-64.

20. Султанов Л.У. Исследование больших деформаций упругопластических тел / Л.У. Султанов // Лобачевские чтения – 2003 / Материалы третьей Всерос. молодеж. науч. шк.-конф. / Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 21. – Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 2003. – С. 202-204.